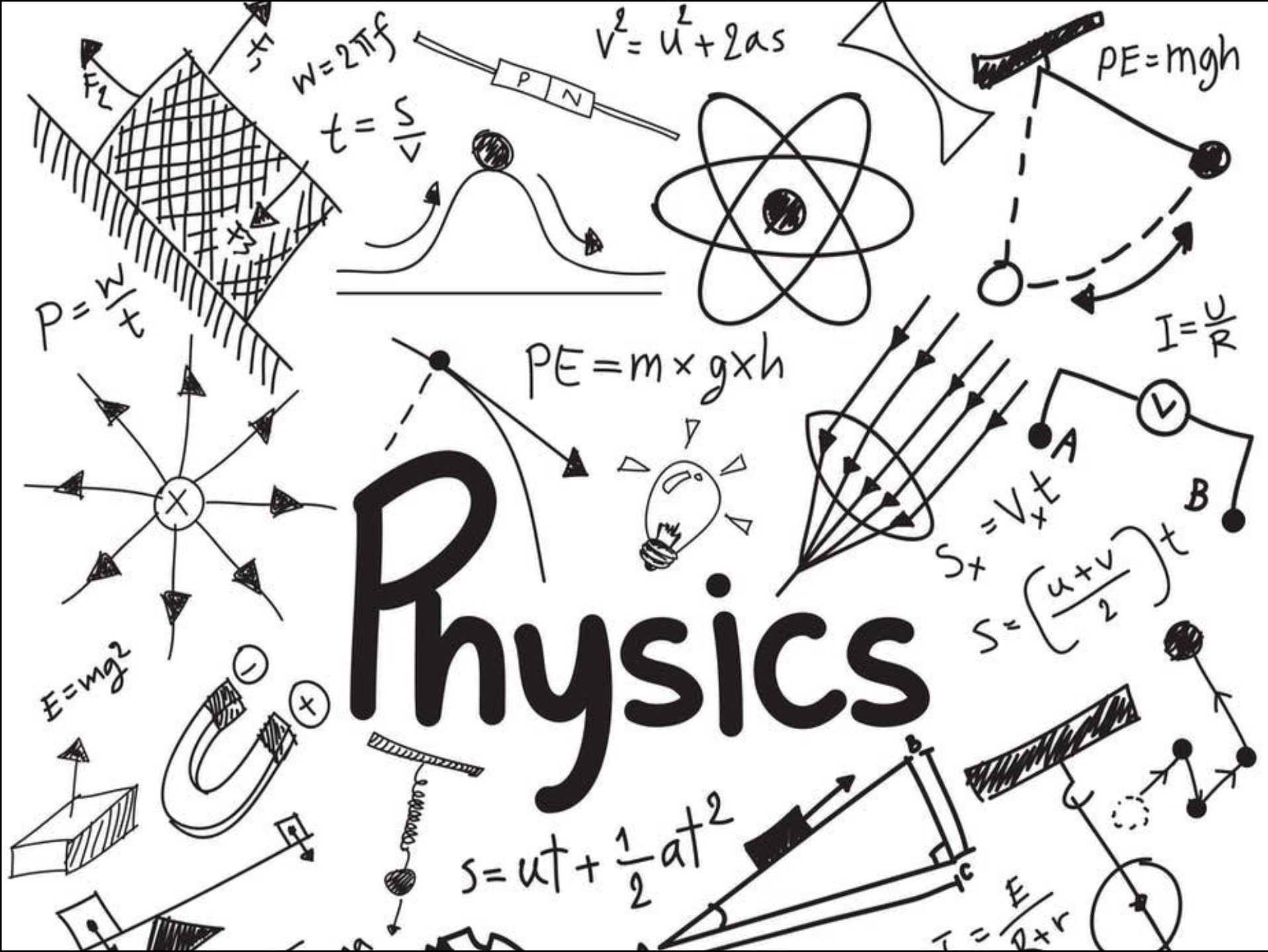


Physics



Reminder...

- Διαλέξεις
 - Προαιρετική παρουσία!
 - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
 - Δεν υπάρχουν απουσίες
- Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- COVID attention: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
- Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- Κινητική Ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2$$

- Σχετίζεται με την κίνηση ενός συστήματος (των μελών του)

- Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

$$U_g = mgy \Rightarrow \Delta U_g = mgy_f - mgy_i$$

- Σχετίζεται με την αλλαγή σχετικής θέσης (κατακόρυφη απομάκρυνση y) των μελών του συστήματος σε σχέση με τη Γη

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- ◉ Ελαστική Δυναμική Ενέργεια

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow \Delta U_s = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

- ◉ Σχετίζεται με τη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας ενός συστήματος ελατηρίου-σώματος

- ◉ Θερμική Ενέργεια

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -W_{friction}$$

- ◉ Σχετίζεται με τη μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος σώμα-επιφάνεια

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου
- Όταν σε ένα σύστημα ασκούνται **εξωτερικές δυνάμεις**, το συνολικό έργο που παράγεται από αυτές στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος

$$\Delta K = K_f - K_i = \sum W_{ext.forces}$$

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας
- Όταν σε ένα σύστημα ασκούνται αποκλειστικά εσωτερικές συντηρητικές δυνάμεις, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

- **Συντηρητικές** ονομάζονται οι δυνάμεις που:
 - Το έργο τους σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν
 - Το έργο τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα στο οποίο παράγεται

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- Συνάρτηση δυναμικής ενέργειας
- Όταν μια **εσωτερική συντηρητική δύναμη** F_{int} προκαλεί μεταβολή στη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος, τότε αποδεικνύεται ότι

$$F_{int,x} = -\frac{dU}{dx}, \quad F_{int,y} = -\frac{dU}{dy}, \quad F_{int,z} = -\frac{dU}{dz}$$

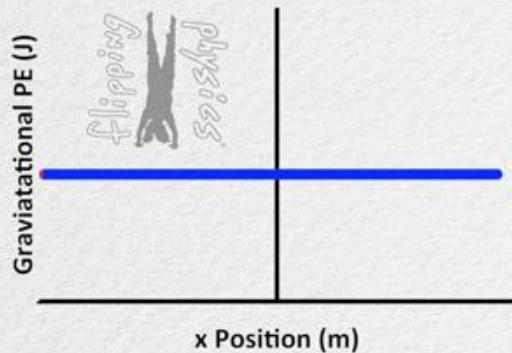
- Η συνάρτηση $U(x, y, z)$ ονομάζεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας** και μπορούμε να εξάγουμε το είδος ισορροπίας ενός συστήματος από τη μορφή της

Ενέργεια Συστήματος (review...)

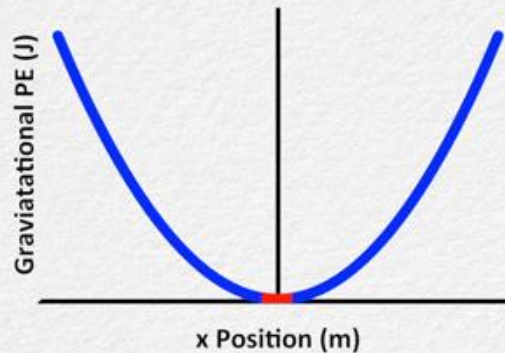
Equilibrium



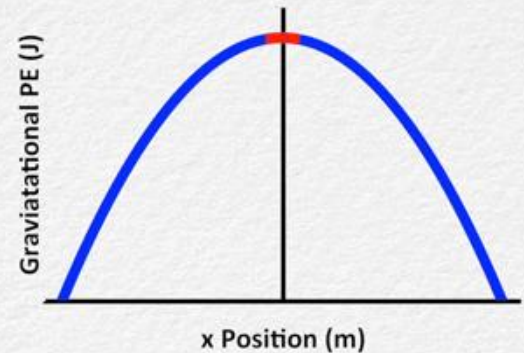
Neutral



Stable



Unstable



$U(x)$

Ενέργεια Συστήματος

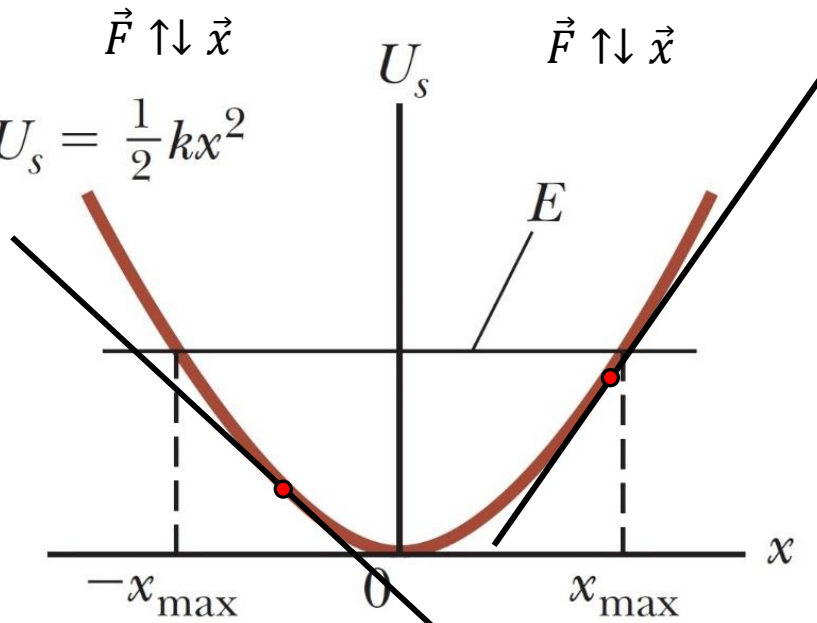
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Η κλίση $\frac{dU}{dx}$ μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός συστήματος
- Παραδείγματα:

$$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$$

$$\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{x}$$

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$



$$\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$$

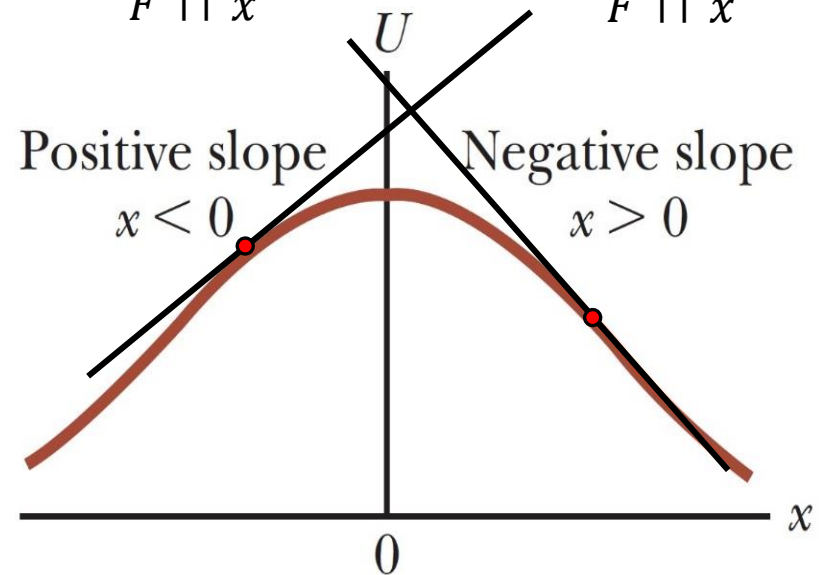
$$\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{x}$$

$$\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$$

$$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$$

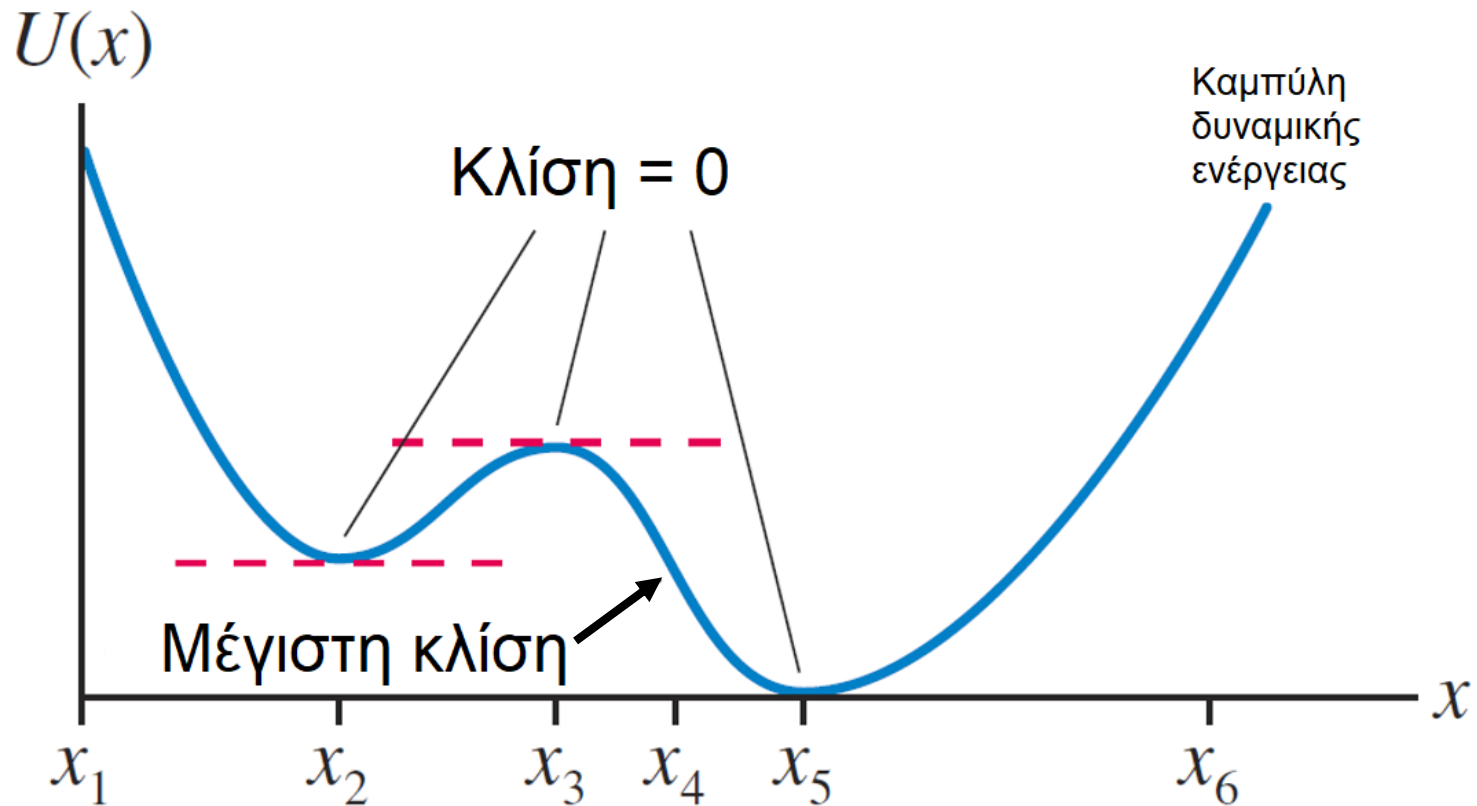
$$\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{x}$$

$$\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{x}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει **περιοχές** ευσταθούς, ασταθούς, και ουδέτερης ισορροπίας



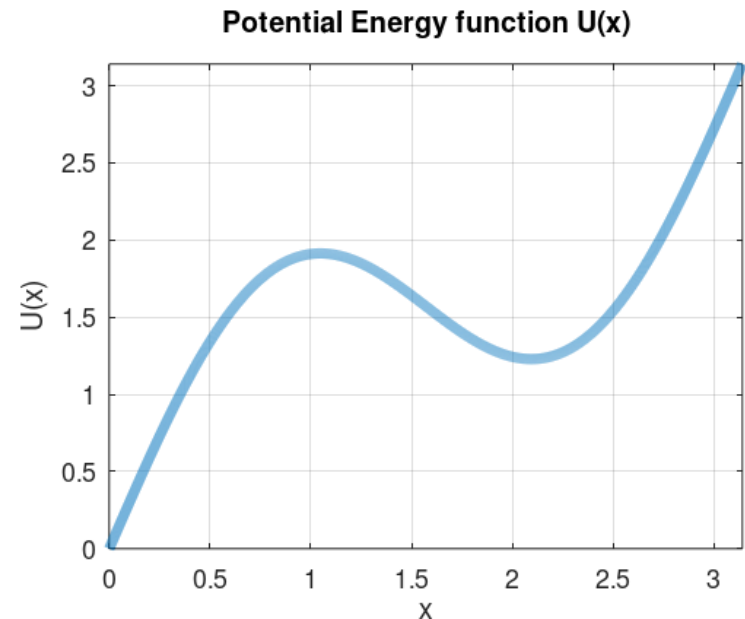
Ενέργεια Συστήματος

- Παράδειγμα:

- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.

α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.

β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.



Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.

α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.

Τα σημεία ισορροπίας αποτελούν λύση της $F_x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{dU}{dx} = 0. \text{ Άρα } U'(x) = \frac{d}{dx} U(x) = (x + \sin(2x))' =$$

$$= 1 + (2x)' \cos(2x) = 1 + 2 \cos(2x). \text{ Άντικαθιστώντας,}$$

$$1 + 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Στο διάστημα $[0, \pi]$ έχουμε: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, δύο θέσεις ισορροπίας.

Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.
β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Πρόταση 6.10 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b) , ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον ξ .

(i) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.

(ii) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.
- β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Με βάση το κριτήριο 2^ο παραχάγουμε:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = (1 + 2\cos(2x))' = 0 + 2 \cdot (2x)'(-\sin(2x)) = -4\sin(2x).$$

- $x_1 = \frac{\pi}{3}$, η 2^η παραχάγος δίνει $-4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \leadsto$ τοπικό
μέγιστο στην $U(x)$
 - $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, η 2^η παραχάγος δίνει $-4 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0$
 $\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$
 $\leadsto$ τοπικό
ελάχιστο
- Ευσταθής, περιοχή ισορροπίας $\leftarrow$ $\leftarrow$
- άρα αεταθής, περιοχή.



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίσαμε δυο ενεργειακά θεωρήματα
 - ΘΜΚΕΕ
 - ΑΔΜΕ
 - Υπάρχει άλλο?
- Διαφορετικές υποθέσεις για καθένα από αυτά
- Οι υποθέσεις σχετίζονταν με το **σύστημα** και τις **δυνάμεις** που δρουν στο σύστημα
 - Εσωτερικές ή εξωτερικές
 - Συντηρητικές ή μη
- Ας κάνουμε μια τελευταία, ομαδική θεώρηση σε αυτά

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Μη απομονωμένα συστήματα**

- Σύστημα βρίσκεται σε «επικοινωνία» με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
 - Υπάρχει ενεργειακό «πάρε-δώσε» με το περιβάλλον

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**

- **Εξωτερική** δύναμη αλλάζει μέσω έργου την κινητική ενέργεια ενός συστήματος-σώματος
- Έχουμε δει μόνο το **έργο** ως μέσο μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα
- Φυσικά, υπάρχουν κι άλλοι τρόποι...

Διατήρηση της Ενέργειας

Ενέργεια μεταφέρεται
στο σώμα μέσω
έργου.

© Cengage Learning/George Sample



a

Ενέργεια μεταφέρεται
εκτός του ραδιοφώνου
από το μεγάφωνο ως
μηχανικά κύματα.

© Cengage Learning/George Sample



b

Ενέργεια μεταφέρεται
στη λαβή του
κουταλιού μέσω
θερμότητας.

© Cengage Learning/George Sample



c

Ενέργεια εισάγεται
στο ρεζερβουάρ του
αυτοκινήτου μέσω
μεταφοράς ύλης.

Cocoon/Photodisc/Getty Images



d

Ενέργεια εισάγεται
στο σεσουάρ μέσω
ηλεκτρισμού.

© Cengage Learning/George Sample



e

Ενέργεια εξάγεται από
τη λάμπα με τη μορφή
ηλεκτρομαγνητικής
ακτινοβολίας.

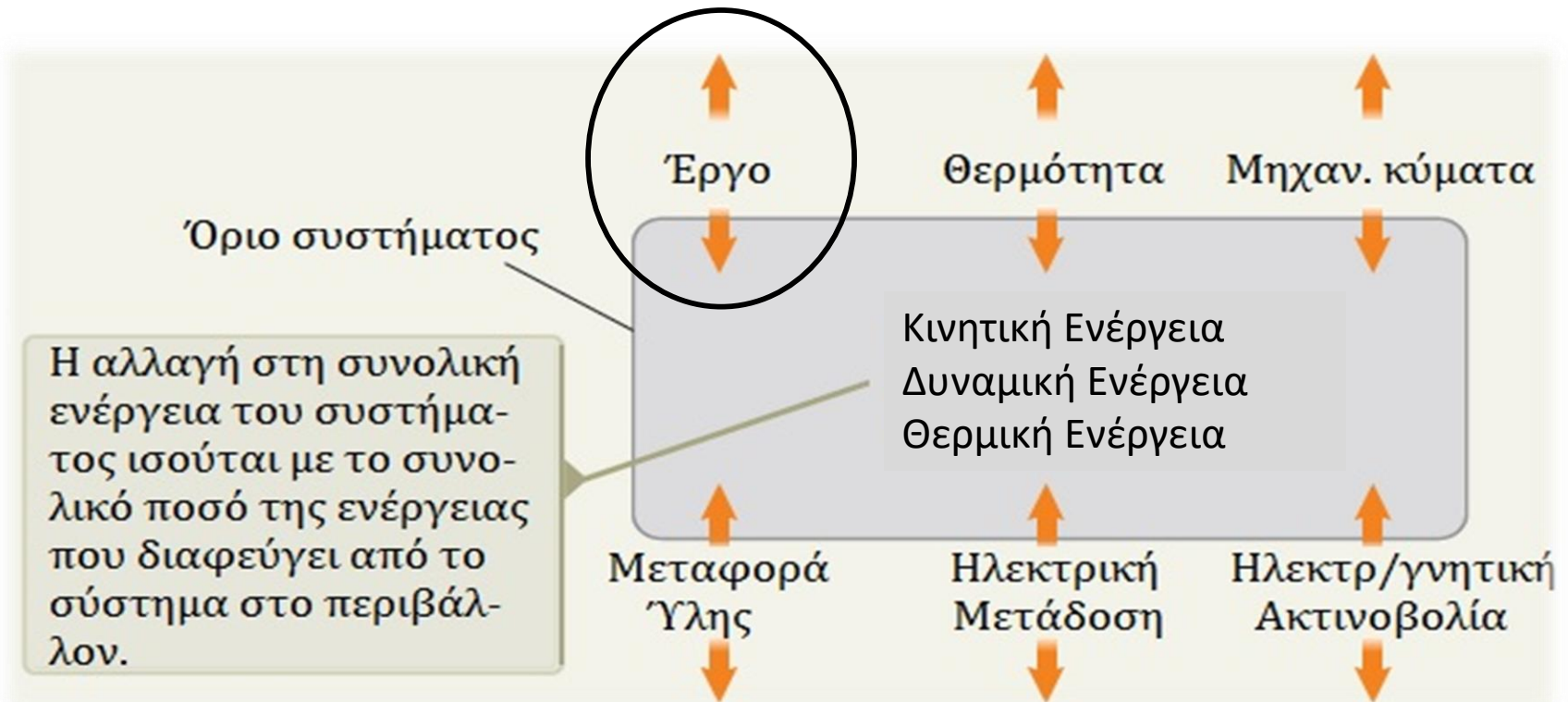
© Cengage Learning/George Sample



f

Διατήρηση της Ενέργειας

Μη απομονωμένα συστήματα



Διατήρηση της Ενέργειας

- Μη απομονωμένα συστήματα
- Αν η **συνολική** ενέργεια σε ένα σύστημα αλλάζει, αυτό συμβαίνει **ΜΟΝΟΝ** αν ενέργεια έχει μεταφερθεί από ή στο περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον **μηχανισμό**
- Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ

$$\Delta E_{system} = \sum T$$

όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και **T είναι το ποσό της ενέργειας** που μεταφέρεται εκτός ή εντός συστήματος με κάποιο **μηχανισμό**

Διατήρηση της Ενέργειας

- Μη απομονωμένα συστήματα

ΔE_{system}

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = \sum W_{ext.forces}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι **μονομελές**, τότε

$$\Delta K = \sum W_{ext.forces}$$

ΘΜΚΕΕ

- Αν το σύστημα είναι **πολυμελές** με παρουσία μόνο δυναμικών ενεργειών, τότε

$$\Delta K + \Delta U = \sum W_{ext.forces}$$

ΑΔΕ

Διατήρηση της Ενέργειας

- Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα
- Δεν υπάρχει «εισαγωγή/διαφυγή» ενέργειας με κανένα τρόπο
- Η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή
- Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ

$$\Delta E_{system} = 0$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα
 - Αναγκαστικά πολυμελές σύστημα
 - Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0$$

ΑΔΕ

αν ασκούνται **συντηρητικές** και **μη** δυνάμεις, δηλ. σε **κάθε** περίπτωση!

- Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

ΑΔΜΕ

μόνον όταν ασκούνται **αποκλειστικά** **συντηρητικές** δυνάμεις!

Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης
προβλημάτων

Σύστημα

Μονομελές

Πολυμελές

Μη απομονωμένο

Μη απομονωμένο

Απομονωμένο

Μόνο συντηρητικές
δυνάμεις

$$\Delta E_{sys} = \Sigma W_{ext}$$

$$\Delta K = \Sigma W_{ext}$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Αρχή
Διατήρησης
Ενέργειας

Θεώρημα
Μεταβολής Κινητικής
Ενέργειας – Έργου

Αρχή Διατήρησης
Μηχανικής
Ενέργειας

$$\Delta E_{sys} = 0$$

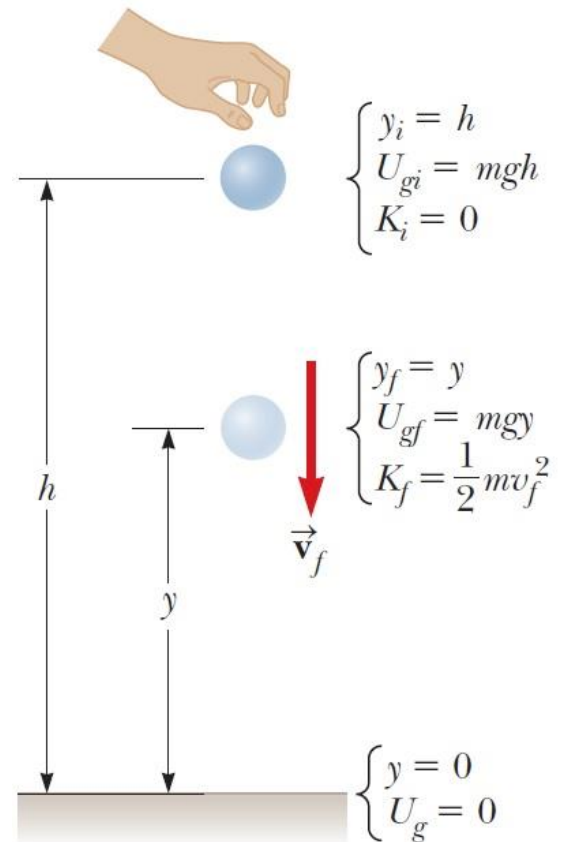
Διατήρηση της Ενέργειας

○ Παράδειγμα:

- Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h .

- Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y . **Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.**

- Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως **σύστημα την μπάλα**.



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h .
- Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y .
Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

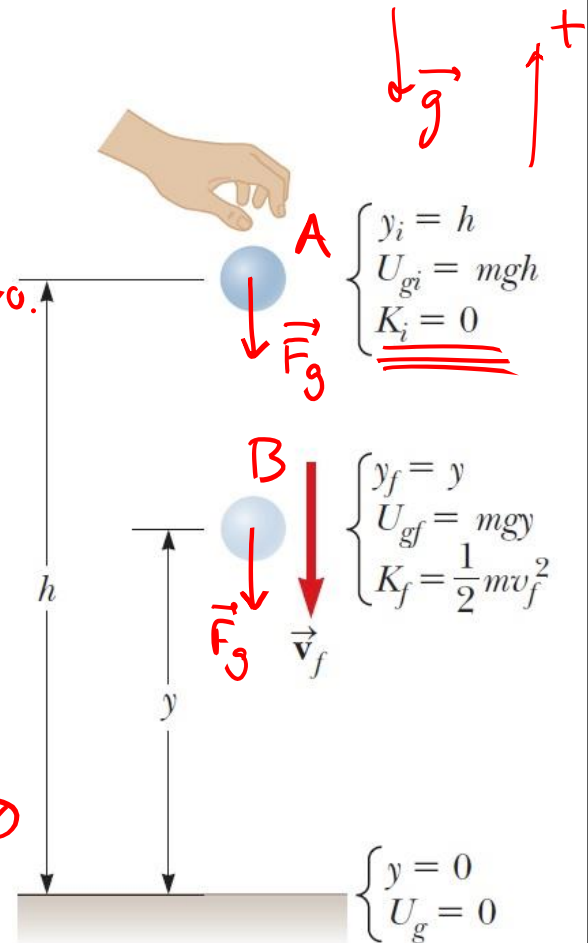
Σύστημα θεωρείται το $\{ \mu\alpha\lambda\alpha + Γ\eta \}$.

Το σύστημα είναι ποσυστημικό και απομονωμένο.

Η δύναμη τα βάρων, $\vec{F}_g$, είναι η μόνη δύναμη στο σύστημα, είναι εσωτερική και συντηρητική. Άρα παραμύθε να πάρουμε

$$\begin{aligned} \Delta ME_{A \rightarrow B} \quad \Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{gA \rightarrow B} &= 0 \\ K_B - K_A + U_B - U_A &= 0 \\ \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 + mgy - mgh &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } u_B^2 = 2g(h-y) \Rightarrow u_B = -\sqrt{2g(h-y)}.$$



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h .
- Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

Θεωράμε ως σύστημα το $\{ \text{μπάλα} \}$. Το σύστημα είναι μονογενές και μη-απορροφητικό. Εφαρμόζεται το ΘΝΚΕΕ.

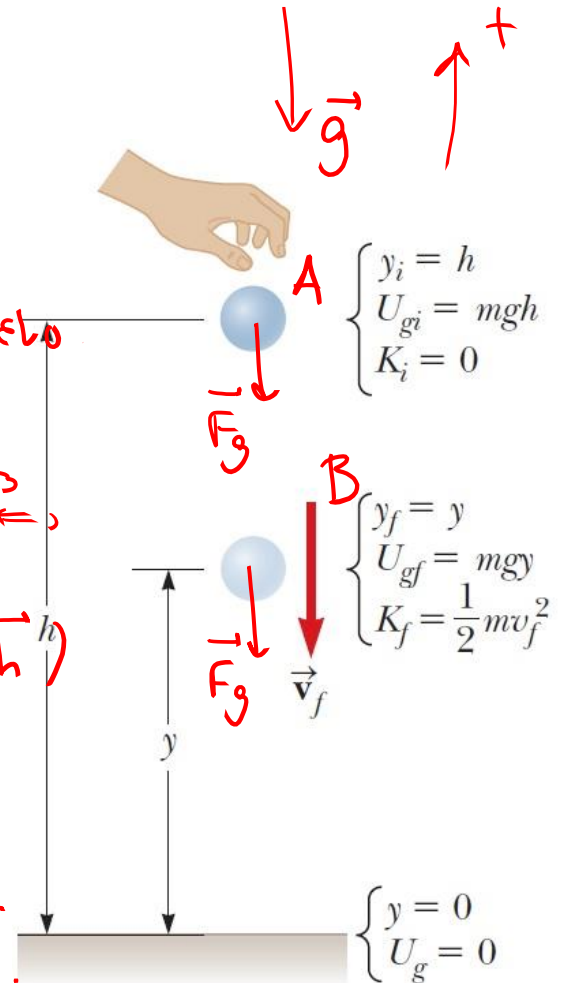
$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{\text{ext}} \Leftrightarrow K_B - K_A = W_{F_g}^{A \rightarrow B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} = m \vec{g} \cdot (\vec{y} - \vec{h})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = -m g \vec{j} \cdot (y - h) \vec{j} =$$

$$= -m g (y - h) = m g (h - y)$$

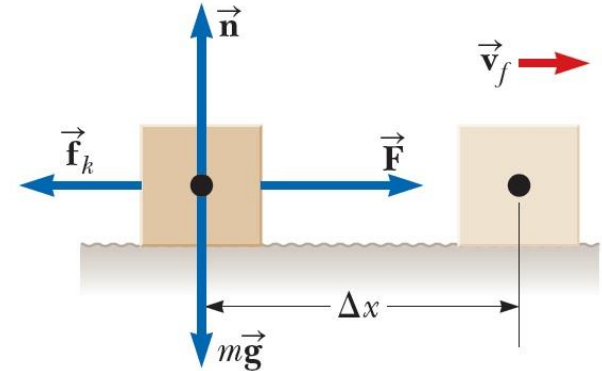
$$\text{Άρα } u_B^2 = 2g(h - y) \Rightarrow u_B = \sqrt{2g(h - y)}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N. Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



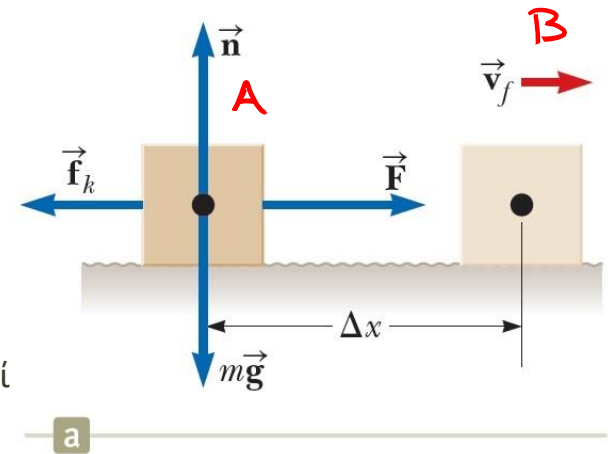
$$W_F = F \Delta x \cos(\theta)$$

Διατήρηση της Ενέργειας

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Επιλέξαμε ως σύστημα το { σώμα μάζας m }, που ελπίδα και η ανεξαρτησία. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ_{A-B}:

$$\Delta K_{A-B} = \sum W_{\text{ext}} \Leftrightarrow K_B - K_A = W_F + \cancel{W_{F_g}} + \cancel{W_n} + W_{f_k}$$

$$\text{Άρα } K_B - K_A = W_F + W_{f_k} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = F \Delta x - f_k \Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = F \Delta x - f_k \Delta x. \quad \left\{ \Rightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = F \Delta x - \mu_k n \Delta x \quad (1) \right.$$

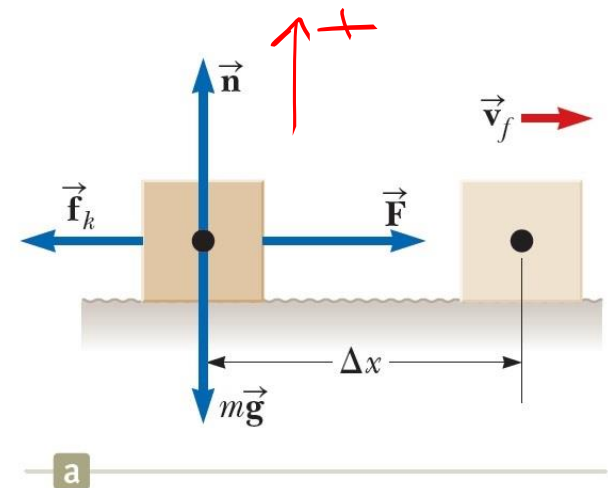
$$f_k = \mu_k n$$

Το σώμα ισορροπεί στον γ'γ $\Rightarrow 1^{\circ}$ Ν. Newton. $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow$

Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- Α) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



$$\Leftrightarrow \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow n - mg = 0 \Leftrightarrow \boxed{n = mg} \quad (2)$$

$$\text{Η } (1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} m u_B^2 = F \Delta x - \mu_k m g \Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B^2 = \frac{2F\Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B \approx 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα } \vec{u}_B \approx 1.8 \vec{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Λύστε το ξανά θεωρώντας ως σύστημα το σώμα και την οριζόντια επιφάνεια!

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίζουμε ότι **έργο == μεταφορά ενέργειας**
- Ερώτημα: Πόσο γρήγορα μεταφέρεται η ενέργεια?
 - Αν θέλετε να αγοράσετε έναν κινητήρα για να κινεί ένα ασανσέρ μάζας 1500 kg για 5 ορόφους, έχει μεγάλη σημασία αν ο κινητήρας το κάνει σε 30 s ή σε 30 min! 😊
- Το «πόσο γρήγορα» υποδηλώνει ένα ρυθμό
 - Ρυθμό μεταφοράς ενέργειας == **στιγμιαία ισχύς P (Power)**

$$P = \frac{dE}{dt}$$

- Μονάδα μέτρησης: $1 \text{ Watt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$

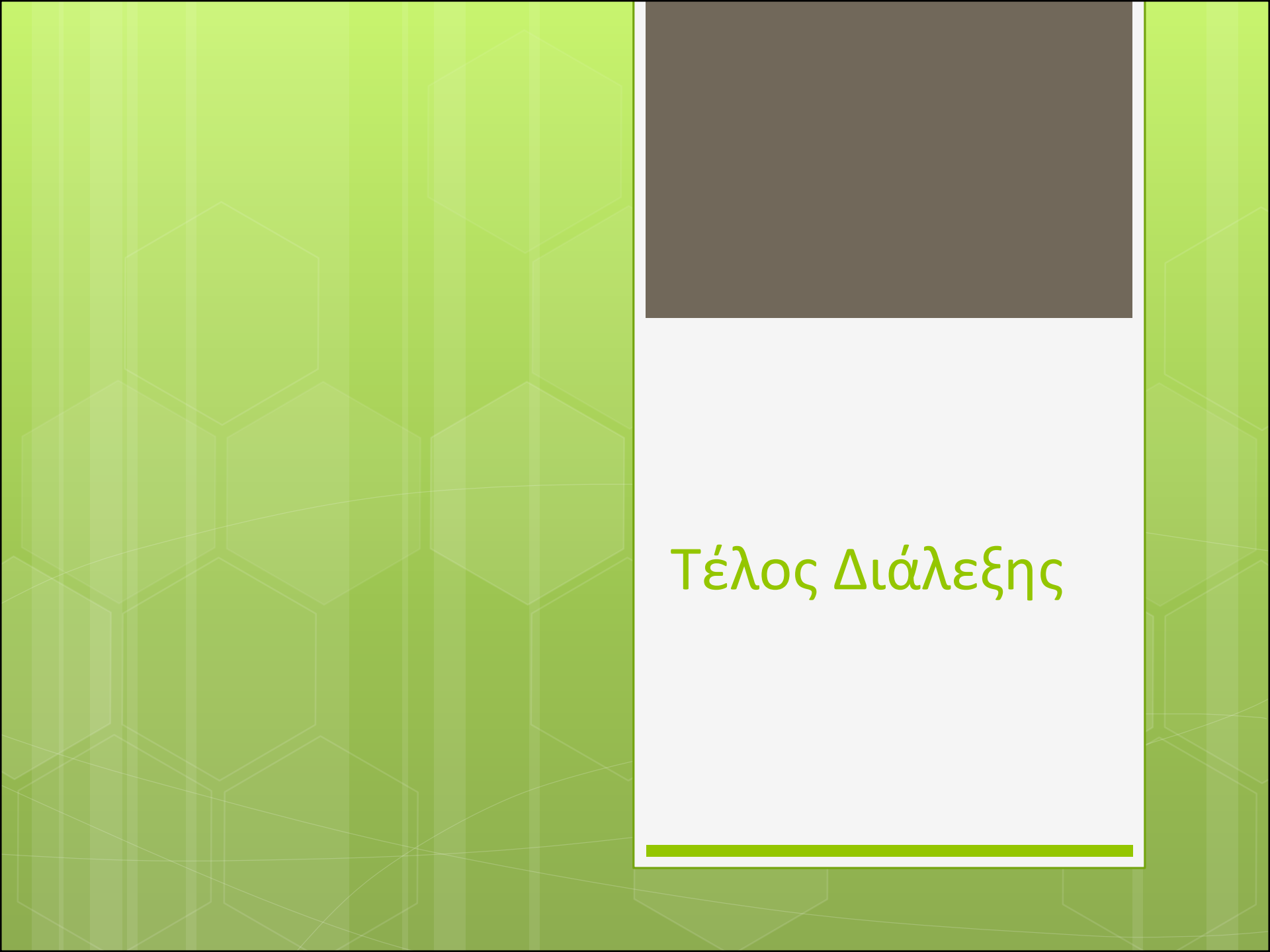
Διατήρηση της Ενέργειας

- Εναλλακτικά, η ισχύς μπορεί να ιδωθεί ως ο **ρυθμός παραγωγής έργου**
- Μέση ισχύς σε διάστημα Δt

$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t}$$

- Στιγμιαία ισχύς (για έργο σταθερής δύναμης)

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{avg} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$



Τέλος Διάλεξης

